

Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 09, No. 1 (2020), hal 165-172.

PEMODELAN ALIRAN FLUIDA PADA MEDIA BERPORI

Alberto Triatmojo, Evi Noviani, Yudhi

INTISARI

Air tanah adalah air yang mengalir melewati tanah dan batuan yang pada umumnya merupakan media berpori. Aliran air ini dapat dimodelkan ke dalam model matematika melalui penjabaran beberapa hukum fisika, seperti prinsip kontinuitas, hukum kekekalan massa, dan hukum Darcy. Pemodelan ini dapat dijadikan acuan untuk instansi seperti perusahaan air minum, pemadam kebakaran, rumah sakit dan instansi terkait untuk mencari letak strategis dari air tanah. Pada penelitian ini, diasumsikan fluida mengalir pada media berpori dengan kecepatan v , kondisi aliran fluida steady, fluidanya tak termampatkan, aliran laminar dan confined. Akibat dari adanya aliran air, maka sumur I akan terisi air dengan ketinggian air h_1 . Daerah yang berjarak ΔL dari sumur I dengan ke tempat lainnya yang mempunyai ketinggian air h_2 . Fluida yang mengalir pada media berpori mempunyai energi. Kemudian energi fluida dianalisis dan dihubungkan dengan head hidrolik. Aliran fluida dianalisis pada satu partikel fluida dengan menggunakan hukum kekekalan massa sehingga diperoleh persamaan Laplace. Persamaan Laplace dapat ditransformasikan ke koordinat bola dan dari persamaan Laplace yang telah ditransformasikan dapat diperoleh solusi persamaan Laplace yang disebut juga persamaan head hidrolik. Dari solusi persamaan Laplace dapat disimpulkan bahwa ketinggian air berbanding terbalik dengan jarak sumber dengan sumur, sehingga semakin jauh jarak sumber air dengan sumur semakin rendah ketinggian air.

Kata Kunci: media berpori, hukum Darcy, persamaan Laplace, head hidrolik.

PENDAHULUAN

Air tanah adalah air yang terdapat di dalam tanah atau batuan di bawah permukaan tanah. Air tanah menjadi sumber air utama untuk memenuhi kebutuhan pokok hidup banyak orang seperti air minum, rumah tangga, industri, irigrasi, pertambangan, perkotaan dan lainnya [1]. Air tanah diatur juga dalam peraturan pemerintahan, yaitu pada Peraturan Menteri ESDM Nomor 20 Tahun 2017 tentang Pedoman Penetapan Nilai Perolehan Air Tanah. Peraturan tersebut membahas tentang seberapa penting peranan air tanah untuk instansi-instansi seperti perusahaan air minum, rumah sakit, pemadam kebakaran dan instansi terkait lainnya.

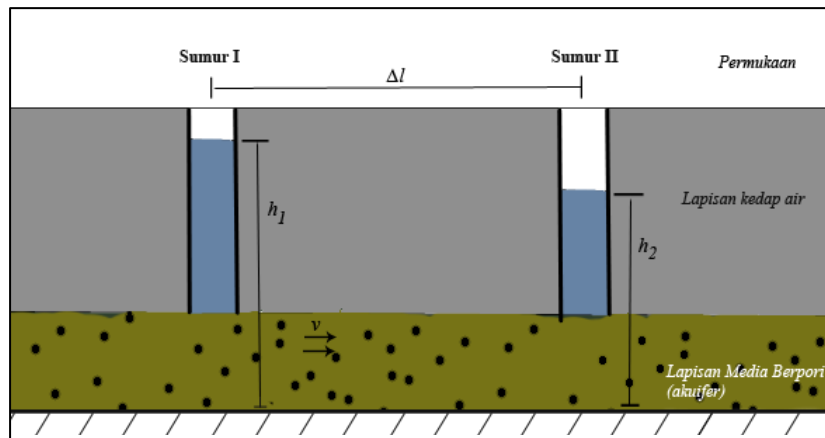
Menurut Darcy, penurunan tinggi air akan terjadi jika lintasan media berpori yang dilewati air semakin panjang [2]. Tinggi air tanah pada media berpori dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematika. Pemodelan air tanah dapat dibentuk menurut kondisi dari aliran air dan sekitarnya. Pada pemodelan ini diperlukan beberapa hukum fisika untuk mengidentifikasi kondisi aliran air, media porinya beserta lingkungan sekitarnya. Hukum fisika yang dipakai antara lain hukum kekekalan massa, persamaan kontinuitas dan hukum Darcy. Pemodelan aliran air pada media berpori juga melibatkan persamaan diferensial pada matematika. Jika aliran air tanah ditinjau melalui persamaan hukum Darcy dan prinsip kontinuitas menghasilkan persamaan diferensial parsial yang berubah terhadap waktu dan tidak berubah terhadap waktu [3].

Manfaat pemodelan aliran fluida pada media berpori dapat digunakan untuk instansi-instansi seperti perusahaan air minum, rumah sakit, pemadam kebakaran dan instansi terkait lainnya untuk menentukan letak strategis keberadaan air tanah. Oleh karena itu, di dalam penelitian ini mengkaji model matematika dari aliran fluida pada media berpori dan mengkaji penyelesaian dari model aliran

fluida pada media berpori. Batasan masalah dari penelitian ini yaitu kasus aliran fluida pada media berpori dalam hal ini adalah aliran air tanah dengan kondisi aliran fluida *steady* dimana aliran air tidak berubah terhadap waktu, fluidanya tak termampatkan (*incompressible*), tidak mengalami turbulensi pada aliran (laminar) dan akuifer dari media berpori diasumsikan terbatas di atas dan di bawah (*confined*).

PENGAMBARAN KASUS ALIRAN FLUIDA PADA MEDIA BERPORI

Misalkan fluida mengalir dengan kecepatan v di dalam tanah yang mempunyai 2 lapisan yaitu tanah dengan lapisan kedap air dan lapisan media berpori. Media berpori mempunyai pori-pori dimana pori-pori tersebut mempunyai nilai porositas ϕ . Nilai porositas adalah nilai dari tingkat kemampuan air untuk melewati media berpori. Fluida tidak dapat mengalir melalui lapisan kedap air, sehingga fluida akan mengalir melalui media berpori atau disebut juga akuifer. Tinjau Gambar 1, akibat dari adanya aliran air, pada suatu tempat (Sumur I) akan terisi air dengan ketinggian air h_1 . Di daerah lain berjarak ΔL dari Sumur I terdapat sumur lain (Sumur II) dengan ketinggian air h_2 .



Gambar 1 Aliran fluida pada media berpori [4]

Pada penelitian ini membentuk model aliran air yang sesuai skema pada Gambar 1. Pembentukan model fluida pada media berpori digunakan beberapa hukum fisika, yaitu hukum kekekalan massa, hukum Darcy dan prinsip kontinuitas. Langkah pertama dalam pemodelan akan ditinjau tentang energi yang terlibat dalam aliran fluida.

ENERGI FLUIDA DALAM MEDIA BERPORI

Fluida dalam media berpori mempunyai 3 energi dalam bentuk energi mekanik, energi termal, dan energi kimia. Penelitian ini diasumsikan bahwa temperatur konstan, sehingga aliran air hanya dipengaruhi oleh energi mekanik saja. Dalam kondisi alam ditemui bahwa energi yang menggerakkan air adalah energi potensial atau energi gravitasi dan energi tekanan. Energi total pada media berpori adalah penjumlahan dari energi kinetik, energi potensial, dan energi tekanan, dapat ditulis:

$$E = E_k + E_p + E_T, \quad (1)$$

dengan

E : Energi keseluruhan ($kg \, m^2/s^2$)

E_k : Energi kinetik ($kg \, m^2/s^2$)

E_p : Energi potensial ($kg \, m^2/s^2$)

E_T : Energi eksternal ($kg \, m^2/s^2$).

Energi terjadi pada aliran fluida sehingga energi keseluruhan dijadikan energi keseluruhan persatuan volume, yang diperoleh sebagai berikut:

$$E_V = \frac{1}{2} \rho_w v^2 + \rho_w g z + P, \quad (2)$$

dengan

E_V : Energi keseluruhan persatuan volume ($kg/m s^2$)

ρ_w : Massa jenis fluida (kg/m^3)

v : Kecepatan (m/s)

g : Gravitasi (m/s^2)

z : Ketinggian dari dasar media berpori menuju sebuah titik partikel aliran fluida yang ditinjau (m)

P : Tekanan hidrostatik ($kg/m s^2$).

Persamaan (2) diubah menjadi energi keseluruhan persatuan berat, sebagai berikut:

$$E_F = \frac{\frac{1}{2} v^2}{g} + z + \frac{P}{\rho_w g}, \quad (3)$$

dengan E_F merupakan energi keseluruhan persatuan berat (m).

Energi total fluida dalam media berpori persatuan berat disebut juga *head hidrolis*. *Head hidrolis* merupakan variabel penting dalam menganalisa aliran air dalam media berpori. Kecepatan yang terjadi pada aliran air tanah sangat lambat sehingga kecepatan diabaikan. Sehingga didapat suatu persamaan sebagai berikut:

$$h = z + \frac{P}{\rho_w g}, \quad (4)$$

dengan h merupakan *head hidrolis* (m)

Fluida mengalir melalui media berpori hanya dipengaruhi oleh tekanan hidrostatik. Tekanan hidrostatik secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P = \rho_w g h_p$$

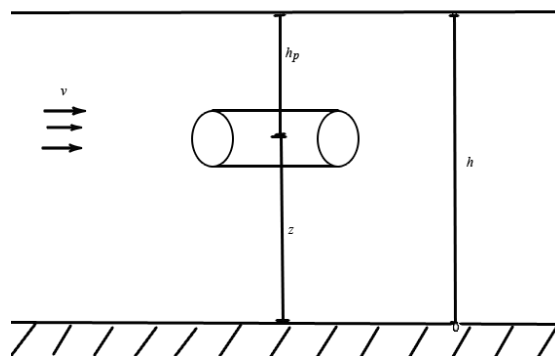
sehingga

$$h_p = \frac{P}{\rho_w g}, \quad (5)$$

dengan h_p merupakan kedalaman dari permukaan menuju aliran fluida pada titik tertentu yang ditinjau (m). Persamaan (5) disubstitusikan ke Persamaan (4), sehingga persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$h = z + h_p. \quad (6)$$

Persamaan (6) memberi suatu informasi keterkaitan hubungan head hidrolis dengan aliran fluida yang mengalir di suatu titik. Keterkaitan dapat dilihat dari Gambar (2) berikut:

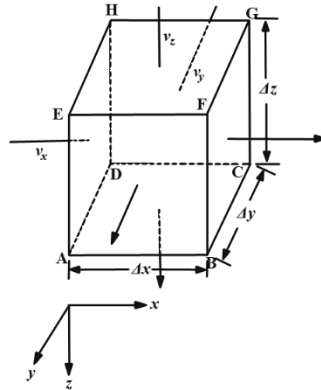


Gambar 2 Peninjauan pada satu partikel media berpori [4]

Satu partikel fluida yang mengalir dalam media berpori mempunyai *head hidrolik* yang ekuivalen dengan tinggi permukaan air dan berlaku juga untuk partikel lainnya [4]. Akibatnya setiap partikel fluida yang melalui media berpori mempunyai *head hidrolik* dengan persamaan yang sama.

PEMODELAN PERSAMAAN ALIRAN FLUIDA PADA MEDIA BERPORI

Hukum kekekalan massa berbunyi massa yang masuk ke dalam suatu partikel benda akan sama dengan massa yang keluar dari benda. Fluida yang melalui media berpori dapat digambarkan dalam bentuk tiga dimensi, penggambaran dari fluida yang melalui media berpori dapat dilihat pada Gambar 3 berikut:



Gambar 3 Sistem koordinat volume kontrol pada satu partikel [5]

Kecepatan air yang melalui akuifer disimbolkan dengan v . Massa jenis merupakan perbandingan dari massa dengan volume, dapat dituliskan sebuah persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\rho_w &= \frac{m}{V} \\ m &= \rho_w V \\ m &= \rho_w \Delta x \Delta y \Delta z,\end{aligned}\tag{6}$$

dengan

- m : Massa partikel aliran fluida (kg)
- V : Volume partikel aliran fluida (m^3)
- Δx : Selisih jarak aliran air pada sumbu X (m)
- Δy : Selisih jarak aliran air pada sumbu Y (m)
- Δz : Selisih jarak aliran air pada sumbu Z (m).

Peninjauan fluida yang melalui beberapa bidang terdapat istilah laju *inflow* dan laju *outflow*. Laju *inflow* adalah laju massa air yang masuk ke suatu bidang, sedangkan laju *outflow* adalah laju massa yang keluar dari bidang. Peninjauan dilakukan dari fluida yang melalui bidang yz , sedemikian sehingga dimisalkan dibutuhkan waktu air untuk melalui sepanjang Δx . Jika Persamaan (6) dibagi dengan t_x , maka didapat persamaan :

$$\frac{m}{t_x} = \rho_w \frac{\Delta x}{t_x} \Delta y \Delta z,\tag{7}$$

dengan t_x merupakan waktu yang dibutuhkan fluida untuk melalui sepanjang Δx (s).

Misalkan $v_{m_{inx}} = \frac{m}{t_x}$ dan $v_x = \frac{\Delta x}{t_x}$. Laju *inflow* melalui bidang $ADHE$ dapat dinyatakan dengan $v_{m_{inx}}$ dan laju air yang masuk dan laju air yang spesifik arah x dinyatakan dengan v_x , sehingga diperoleh :

$$v_{m_{inx}} = \rho_w v_x \Delta y \Delta z,\tag{8}$$

dengan

$v_{m_{inx}}$: Laju *inflow* pada sumbu X (kg/s)

v_x : Kecepatan aliran fluida pada sumbu X (m/s).

Selain itu juga untuk mendapat persamaan laju *outflow* bidang BCGF $v_{m_{outx}}$ juga dapat dilihat dari Gambar 3, sehingga membentuk persamaan:

$$v_{m_{outx}} = \rho_w v_x \Delta y \Delta z + \frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (9)$$

dengan $v_{m_{outx}}$ merupakan laju *outflow* pada sumbu X (kg/s).

Persamaan (9) didapat dari penjumlahan laju *inflow* dengan perubahan laju massa air yang masuk melalui bidang ADHE ke bidang BCGF. Selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada Sumbu X adalah

$$\Delta v_{m_x} = \frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (10)$$

dengan Δv_{m_x} merupakan selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada Sumbu X (kg/s).

Selain peninjauan dari bidang yz , peninjauan juga dilakukan pada bidang xz dan bidang xy . Sama seperti mencari selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada sumbu X, untuk mencari selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada sumbu Y dan selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada sumbu Z digunakan juga cara yang sama. Berikut selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada sumbu Y dan selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada sumbu Z:

$$\Delta v_{m_y} = \frac{\partial(\rho_w v_y)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (11)$$

dan

$$\Delta v_{m_z} = \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (12)$$

dengan

Δv_{m_y} : Selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada Sumbu Y (kg/s)

Δv_{m_z} : Selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* pada Sumbu Z (kg/s)

v_y : Kecepatan aliran fluida pada sumbu Y (m/s)

v_z : Kecepatan aliran fluida pada sumbu Z (m/s).

Persamaan (10), Persamaan (11), dan Persamaan (12) dijumlahkan menjadi total selisih laju *inflow* dan *outflow* yang dituliskan sebagai berikut:

$$\Delta v_{tot} = \left(\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (13)$$

dengan Δv_{tot} adalah total selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* (kg/s).

Massa air per satuan volume total akuifer adalah hasil kali antara massa jenis dengan porositas. Porositas merupakan volume air per satuan volume akuifer. Total selisih antara laju *inflow* dan laju *outflow* persatuan volume dapat ditulis $\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial t}$. Sehingga persamaan adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial(\rho_w \phi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (14)$$

Aliran fluida dalam penelitian ini menggunakan konsep hukum Darcy yang ditulis sebagai berikut:

$$v = -K \left(\frac{dh}{dL} \right), \quad (15)$$

dengan

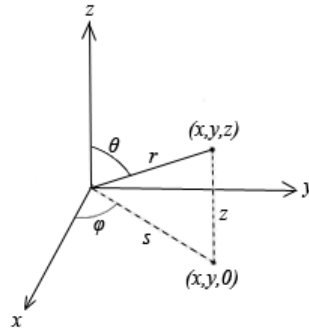
K : Konduktivitas hidrolik (m/s)

L : Panjang lintasan (m).

Aliran fluida menggunakan konsep hukum Darcy dan aliran *steady state* sehingga tidak dipengaruhi oleh waktu. Sehingga dari asumsi tersebut didapat persamaan berikut:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \quad (16)$$

Persamaan (16) juga disebut sebagai persamaan Laplace. Persamaan (16) ditransformasikan dari koordinat kartesius menjadi koordinat bola. Pembentukan transformasi Persamaan (16) dapat dilihat pada Gambar 4 berikut:



Gambar 4 Pembentukan transformasi dari koordinat Kartesius menjadi koordinat bola [5]

Pemisalan dapat disesuaikan dengan Gambar 4 dengan $x = s \cos \varphi$, $y = s \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, dan $s = r \sin \theta$. Dari pemisalan didapat operator diferensial sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (17)$$

Persamaan Laplace merupakan persamaan dengan fungsi harmonik. Fungsi harmonik pada Persamaan (16) terjadi pada ruang dimensi tiga. Fungsi harmonik pada ruang dimensi tiga tidak dipengaruhi oleh pergerakan rotasi, maka suatu persamaan diturunkan terhadap sudut menjadi nol [5]. Sehingga operator diferensial pada Persamaan (17) berubah menjadi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (18)$$

Operator diferensial dari Persamaan (18) digunakan untuk merubah Persamaan (16) menjadi:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = 0. \quad (19)$$

Persamaan (19) diselesaikan menggunakan persamaan diferensial sehingga membentuk persamaan:

$$h = -\frac{C_1}{r} + C_2, \quad (20)$$

dengan

C_1 dan C_2 : Konstanta

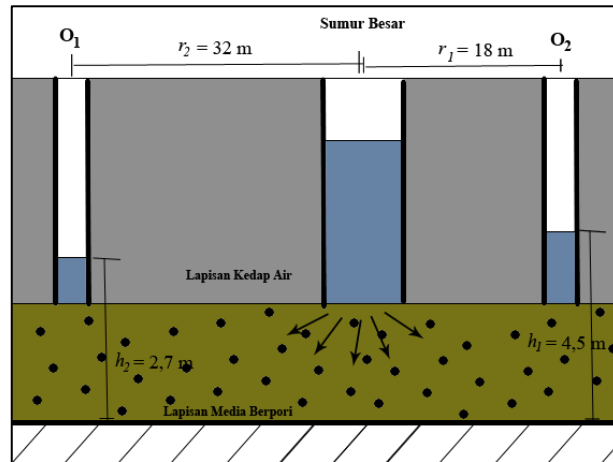
h : head hidrolik (m)

r : Jarak sumur (m).

CONTOH KASUS ALIRAN FLUIDA PADA MEDIA BERPORI

Pengaplikasian data dari persamaan aliran air tanah di dapat dari Altunkaynak dan Sen [6] yang telah melakukan pengamatan aliran air tanah di daerah Usfan, Turki. Data penelitian dari Altunkaynak dan Sen [6] adalah $r_1 = 18 \text{ m}$, $r_2 = 32 \text{ m}$, $h_1 = 4,5 \text{ m}$, dan $h_2 = 2,7 \text{ m}$ dengan r_1 adalah jarak posisi awal dengan koordinat pertama, r_2 adalah jarak posisi awal dengan koordinat kedua, h_1 adalah ketinggian air pada media berpori di koordinat pertama, dan h_2 adalah ketinggian air pada media berpori

di koordinat kedua. Letak sumur besar, koordinat sumur pertama O_1 , dan koordinat sumur kedua O_2 dapat dilihat dari Gambar 5 berikut:

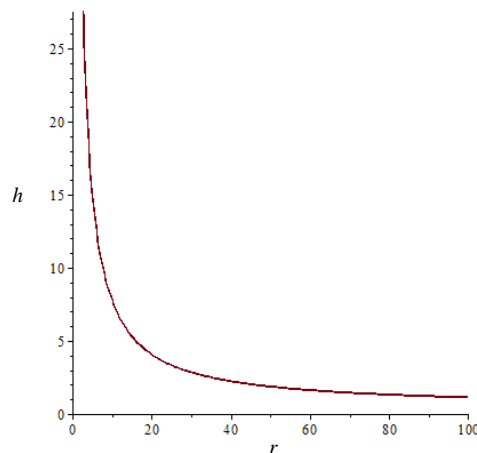


Gambar 5 Ilustrasi jarak sumur besar dengan koordinat 1 dan koordinat 2 beserta ketinggiannya

Pengaplikasian tersebut didapat sebuah persamaan *head hidrolis* khusus daerah Usfan yang dituliskan sebagai berikut:

$$h = \frac{5184}{70r} + \frac{27}{70} \quad (21)$$

Persamaan (21) dapat diketahui bahwa *head hidrolis* berbanding terbalik dengan jarak sumur sehingga semakin jauh jarak sumur, semakin menurun *head hidrolis*. Sama halnya yang diungkapkan Darcy bahwa semakin jauh jarak lintasan semakin menurun ketinggian air [2]. Grafik dari Persamaan (3.44) dapat dilihat pada Gambar 6 berikut:



Gambar 6 Grafik solusi persamaan *head hidrolis* daerah Usfan

Grafik solusi persamaan yang dapat dilihat pada Gambar 6 mengalami penurunan *head hidrolis* disaat semakin jauh dari tempat air mengalir. Pernyataan ini sama seperti yang diungkap oleh Darcy bahwa semakin jauh lintasan yang dilalui air, semakin terjadi penurunan *head hidrolis*.

PENUTUP

Fluida yang mengalir pada media berpori mempunyai energi. Energi yang mempengaruhi aliran fluida terdiri dari energi mekanik, energi termal dan energi kimia. Penelitian ini diasumsikan temperatur konstan, sehingga aliran air hanya dipengaruhi oleh energi mekanik. Energi mekanik adalah penjumlahan dari energi potensial, energi kinetik dan energi tekanan. Karena pergerakan air tanah yang sangat lambat maka diasumsikan bahwa kecepatan air tanah mendekati nol sehingga energi kinetik dari aliran fluida dapat diabaikan. Kemudian energi fluida dianalisis dan dihubungkan dengan *head hidrolis*.

Aliran fluida dianalisis pada satu partikel fluida dengan menggunakan hukum kekekalan massa. Aliran fluida ditinjau menggunakan aliran dimensi tiga sehingga diperoleh sebuah persamaan yang disubstitusikan sebuah persamaan dari hukum Darcy yang menghasilkan persamaan Laplace.

Persamaan Laplace yang telah diperoleh ditransformasi dari persamaan diferensial koordinat kartesius menjadi koordinat bola, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = 0.$$

Setelah transformasi, kemudian dicari solusi persamaan aliran fluida pada media berpori yang dituliskan sebagai berikut:

$$h = -\frac{1}{r} C_1 + C_2,$$

dengan h adalah *head hidrolis*, C_1 dan C_2 adalah konstanta dan r adalah jarak sumur. Solusi dari persamaan Laplace model aliran air pada media berpori disebut juga persamaan *head hidrolis*. Persamaan *head hidrolis* dapat disimpulkan bahwa semakin jauh sumur dengan sumber air mengalir, semakin rendah ketinggian air.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Rejekiingrum, P. Peluang Pemanfaatan Air Tanah Untuk Keberlanjutan Sumber Daya Air. *Sumberdaya Lahan*, III(2), pp. 85-96; 2009.
- [2] Shekhar, Shashank . *Darcy's Law*. New Delhi: University of Delhi; 2017.
- [3] Syahrudin, Muhammad Hamzah. Persamaan Aliran Air Dalam Media Berpori Sebagai Aliran Airtanah (Groundwater). *Simposium Fisika Nasional 2014 (SFN XXVII)*, Volume XXVII; 2014.
- [4] Fetter, Charles Willard. *Applied Hydrogeology / C.W. Fetter,--4th ed. p. cm.*. Edisi keempat. New Jersey: Prentice-Hall, Inc; 2001.
- [5] Strauss, Walter A. *Partial Differential Equation an Introduction*. Edisi kedua. New Jersey: John Wiley and Sons, Inc; 2008.
- [6] Altunkaynak, A. dan Sen, Z. Steady state flow with hydraulic conductivity change around large diameter wells. *Hydrological Processes*, Volume XXV, pp. 1778-1783; 2011.

ALBERTO TRIATMOJO : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak

alberto08220@gmail.com

EVI NOVIANI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak

evi_noviani@math.untan.ac.id

YUDHI : Jurusan Matematika FMIPA Untan, Pontianak

yudhi@math.untan.ac.id

